

Relatività e Meccanica Quantistica: concetti e idee

Relativity and Quantum Mechanics: concepts and ideas

Settimana 5

Lezione 5.1

La funzione d'onda – I parte

Carlo Cosmelli



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

coursera



Relatività e Meccanica Quantistica: concetti e idee
Relativity and Quantum Mechanics: concepts and ideas



Settimana 5

**La funzione d'onda – Heisenberg, il Principio di Indeterminazione –
Le due fenditure**

Carlo Cosmelli



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

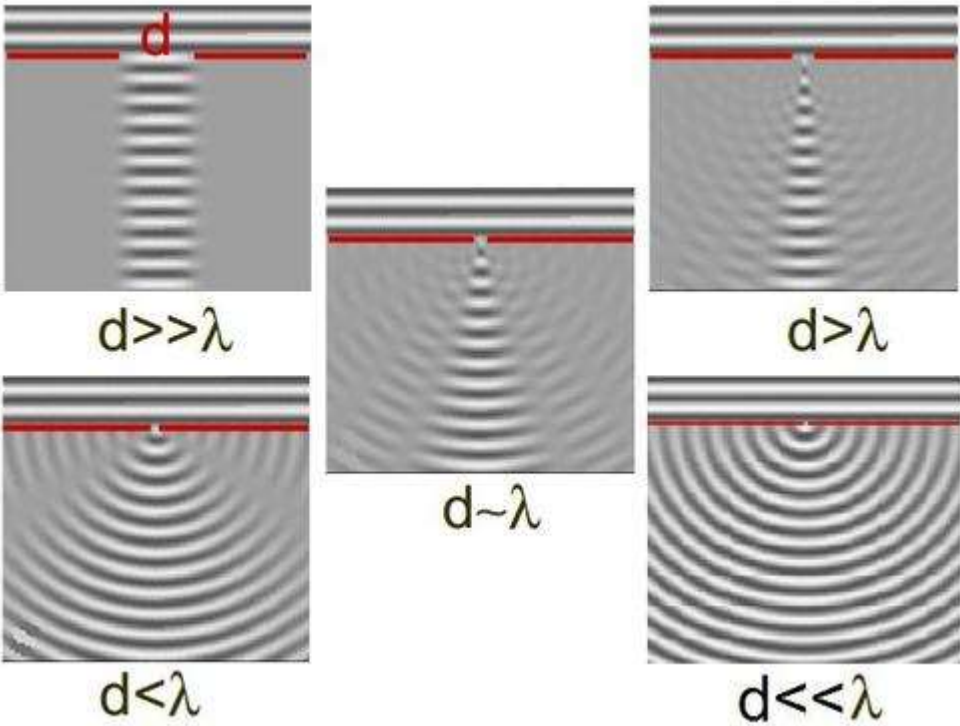
coursera

Perché gli effetti quantistici spesso non si vedono? Le onde 1

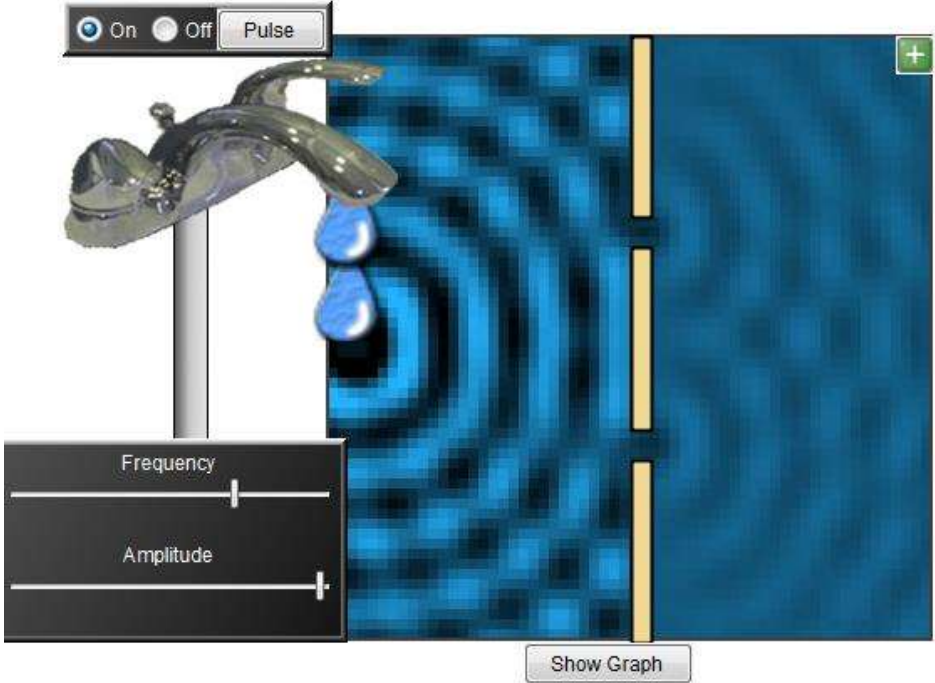


Gli «effetti» legati alle onde sono apprezzabili quando gli «ostacoli» sono grandi circa come la lunghezza d'onda o minori. [Simulazioni PHET]

Diffrazione



Diffrazione+ Interferenza



Perché gli effetti quantistici spesso non si vedono? Le onde 2



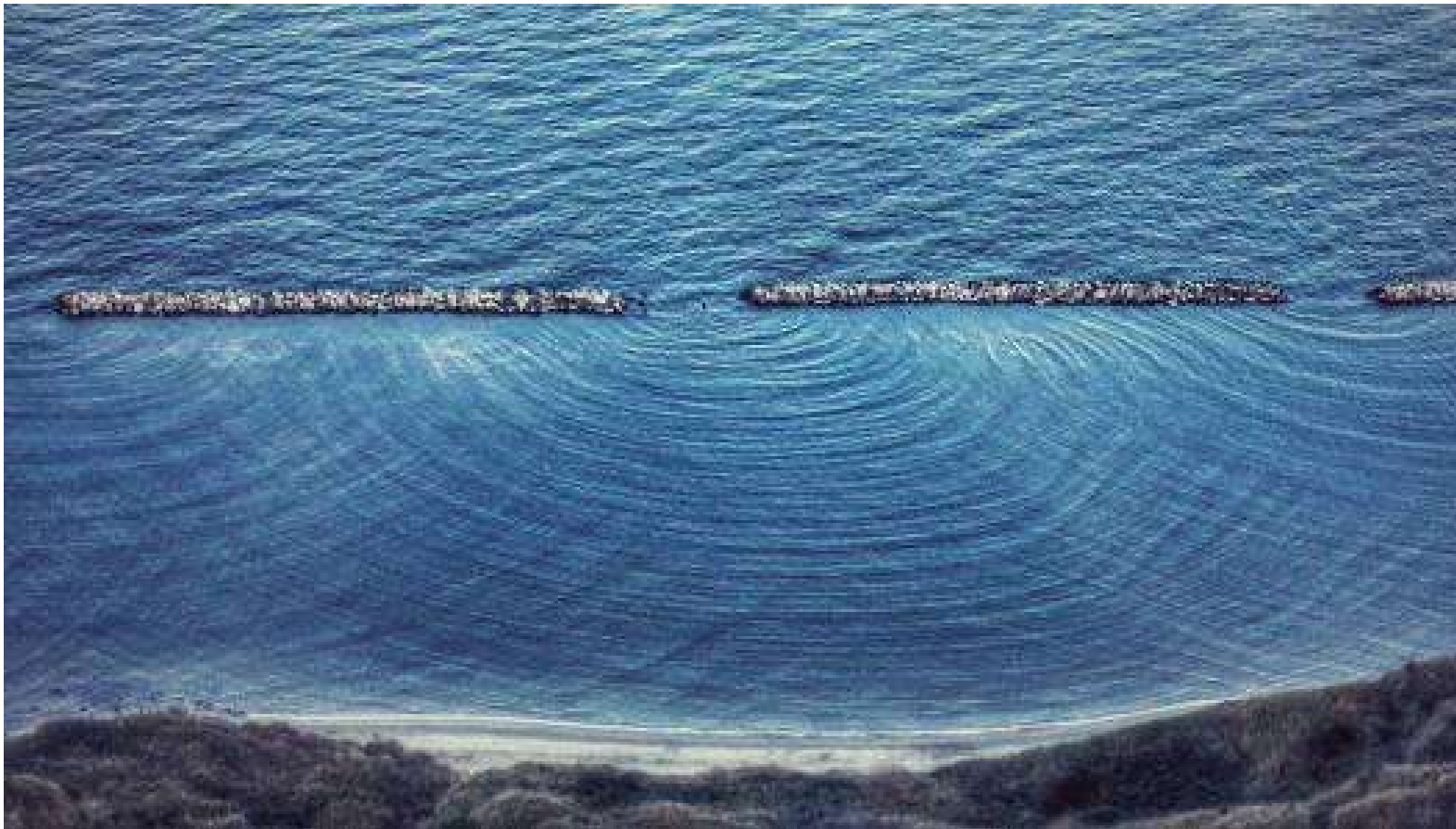
Onde nell'acqua di un fiume (diffrazione e interferenza)

- Dimensioni «ostacoli» circa 1-10 metri.
- Lunghezza d'onda delle onde: circa 1 metro.

di un CD: circa $1 \mu\text{m}$

Perché gli effetti quantistici spesso non si vedono? Le onde 1

Gli «effetti» legati alle onde sono apprezzabili quando gli «ostacoli» sono grandi circa come la lunghezza d'onda o minori. [Simulazioni PHET]



Perché gli effetti quantistici spesso non si vedono? Le onde



de Broglie dice che ad ogni corpo è associata un'onda...ma perché devo utilizzarla per calcolare cosa succede ad un elettrone in un atomo e non ad un pianeta intorno al Sole?

La lunghezza d'onda associata ad un corpo è: $\lambda = \frac{h}{mv}$ e gli effetti li vedo quando il corpo interagisce con oggetti delle dimensioni di λ . [vedi raggio di luce: ottica classica/interferenza e diffrazione]

La Terra: $\lambda = \frac{h}{M_T V_T} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{6 \cdot 10^{24} \cdot 30 \cdot 10^3} \cong 4 \cdot 10^{-63} \text{ m} \text{ !!!!!}$

Una palla da tennis: $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{60 \text{ g} \cdot 200 \text{ km/ora}} \cong 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Un granello di polvere da $1 \mu\text{m}$: $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{10^{-1} \cdot 1 \text{ cm/s}} \cong 0,7 \cdot 10^{-16} \text{ m}$

Un elettrone (nell'atomo di H): $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{0,9 \cdot 10^{-30} \cdot 2,3 \cdot 10^6} \cong \mathbf{3,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}}$

...il diametro dell'atomo di H è circa $1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, la circonferenza $\cong \mathbf{3,1 \cdot 10^{-10} \text{ m} !}$

La MQ à la Copenaghen – un primo approccio



Meccanica Classica

Lo stato di un corpo è determinato da alcune caratteristiche intrinseche (massa, carica, volume...) più le coordinate nello spazio e nel tempo.

La legge con cui lo stato evolve è:

$$\bar{\mathbf{F}} = m\bar{\mathbf{a}}$$

I risultati delle misure dello stato di un corpo dipendono in modo noto dall'osservatore e dal SdR (RS- RG).

Le misure possono avere delle incertezze sperimentali, per cui posso conoscere lo stato del sistema con una certa approssimazione.

Meccanica Quantistica

La descrizione completa dello stato di un qualunque sistema, è data dalla funzione d'onda $\psi(\mathbf{r},t)$, una funzione complessa che rappresenta l'ampiezza di probabilità associata al sistema.

La legge con cui la $\psi(\mathbf{r},t)$ evolve è l'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \psi$$

La funzione d'onda ci dà il massimo dell'informazione possibile su di un sistema, che può essere solo probabilistica.

E' la cosiddetta probabilità «non epistemica», cioè non è dovuta ad una mancanza di conoscenza dello stato iniziale di un sistema.



I tasselli finali della MQ: Born, Schrödinger e Heisenberg (1926-1927)



1. La descrizione **completa** dello stato di un qualunque sistema (di una **particella**), è data dalla **funzione d'onda** $\psi(\mathbf{r},t)$ che rappresenta **l'ampiezza di probabilità di trovare la particella in \mathbf{r} al tempo t , se la misuro**. **La probabilità è data da: $|\psi(\mathbf{r},t)|^2$ (Born)**.
2. Se la misura di una grandezza fisica fornisce un certo risultato, la funzione d'onda «collassa» intorno a quel risultato, a cui si assocerà una probabilità $P=1$.
3. L'evoluzione della funzione d'onda $\psi(\mathbf{r},t)$ è determinata dall'**equazione di Schrödinger** il cui risultato è completamente **deterministico**. **(Sostituisce $F=ma$)**
4. **Il principio di indeterminazione**: alcune coppie di grandezze fisiche non possono avere, **contemporaneamente**, valori arbitrariamente precisi.



I postulati della MQ (1927...), scritti oggi: 1-4



Sono molti... e abbastanza complicati

1. Lo stato di un sistema fisico ad un certo istante t_0 è definito specificando il ket $|\psi(t_0)\rangle$ appartenente allo spazio degli stati \mathcal{E} .
2. Ogni grandezza fisica misurabile \mathcal{A} è descritta da un operatore A che agisce su \mathcal{A} . Questo operatore è un'osservabile.
3. L'unico possibile risultato della misura di una grandezza fisica \mathcal{A} è uno degli autovalori della corrispondente osservabile \mathcal{A} .
4. I: Quando una quantità fisica \mathcal{A} è misurata su di un sistema nello stato *normalizzato* $|\psi\rangle$, la probabilità $\mathcal{P}(a_n)$ di ottenere l'autovalore *non degenere* a_n della corrispondente osservabile \mathcal{A} è:
$$\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2$$
, dove $|u_n\rangle$ è l'autovettore normalizzato di A associato all'autovalore a_n .
II: Quando una quantità fisica \mathcal{A} è misurata su di un sistema nello stato *normalizzato* $|\psi\rangle$, la probabilità $\mathcal{P}(a_n)$ di ottenere l'autovalore a_n della corrispondente osservabile \mathcal{A} è:
$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2$$
, dove g_n è il grado di degenerazione di a_n e $\{|u_n^i\rangle\}$, ($i = 1, 2, \dots, g_n$) è un set ortonormale di vettori che formano una base nell'autosottospazio \mathcal{E}_n associato all'autovalore a_n di A .
III: Quando una quantità fisica \mathcal{A} è misurata su di un sistema nello stato *normalizzato* $|\psi\rangle$, la probabilità $d\mathcal{P}(\alpha)$ di ottenere un risultato compreso fra α e $\alpha + d\alpha$ è uguale a:
$$d\mathcal{P}(\alpha) = |\langle v_\alpha | \psi \rangle|^2 d\alpha$$
 dove $|v_\alpha\rangle$ è l'autovettore corrispondente all'autovalore α dell'osservabile A associata alla grandezza fisica \mathcal{A} .

[la f.d.o. è legata alla probabilità di ottenere una misura]

I postulati della MQ (1927...), 5-6



5. Se la misura di una grandezza fisica \mathcal{A} fatta su di un sistema nello stato $|\psi\rangle$ fornisce il risultato a_n , lo stato del sistema immediatamente dopo la misura è la proiezione normalizzata

$$\frac{P_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}} \text{ di } |\psi\rangle \text{ nell'autosottospazio associato con } a_n.$$

[il collasso della f.d.o.]

6. L'evoluzione del vettore di stato $|\psi(t)\rangle$ è governata dall'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \text{ dove } H(t) \text{ è l'osservabile associata all'energia totale del sistema.}$$

[l'evoluzione deterministica del sistema]

- Le relazioni di indeterminazione di Heisenberg si possono derivare dalle ipotesi fatte. Ma non per la coppia Energia-tempo, che quindi rimane un principio.

Dualità onda – particella. 1



Le particelle elementari come elettroni e fotoni mostrano una duplice natura, sia corpuscolare che ondulatoria.

In generale lo stesso oggetto fisico, ad esempio un elettrone sarà:

Un'Onda con **lunghezza d'onda** $\lambda = h / p = h / mv$

e/o

Una Particella con massa **m**, posizione **r** al tempo **t** e impulso **p=mv**

Un oggetto fisico speciale è il **fotone** che ha **massa a riposo = 0**.

E' **un'onda con velocità c**, frequenza **f**; lunghezza d'onda λ ; $c = \lambda f \cong 300'000 \text{ km/s}$

E' inoltre considerato il **quanto di luce** (la **particella elementare della luce**) e la sua energia vale: $E = hf$

L'impulso del fotone è **p=E/c**.

La visione del mondo della Relatività e della Meccanica Quantistica

Settimana 5

Lezione 5.2

Le funzione d'onda – Il parte



P1. La descrizione completa dello stato di un qualunque sistema (di una particella), è data dalla funzione d'onda $\psi(r,t)$ che rappresenta l'ampiezza di probabilità di trovare la particella in r al tempo t .

Carlo Cosmelli



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

coursera

Cosa è l'ampiezza di probabilità - 1



- ♣ **Evento casuale:** E' un evento che può presentarsi con **varie modalità**, ed il cui risultato è appunto **“casuale”**, cioè singolarmente **non predicibile**.

Esempio: Lancio di un dado, estrazione di un numero alla tombola, avere una mano con 4 assi giocando a poker...

- ♠ La **Probabilità** assegnata a un evento è **un numero compreso fra 0 e 1**:

Rappresenta il grado di fiducia che abbiamo nell'accadere di un certo evento casuale:

- $P=0$ nessuna fiducia, non accadrà mai, è un evento impossibile...
 - Che in una mano di poker, con un mazzo regolare, mi capitino 5 assi.
- $P=1$ massima fiducia, siamo sicuri che accada, è un evento certo...
 - Che lanciando un dado normale venga un numero fra 1 e 6.

La probabilità – come si calcola I



Eventi discreti - numero finito di eventi possibili

Matematicamente, ed a priori, la probabilità può essere calcolata come il rapporto tra il numero di eventi “favorevoli” n e il numero di eventi totali N

$$P(\mathbf{n}) = \frac{n}{N}$$

Es. 1: Lancio un dado a 6 facce, e leggo il numero che sta sulla faccia superiore:

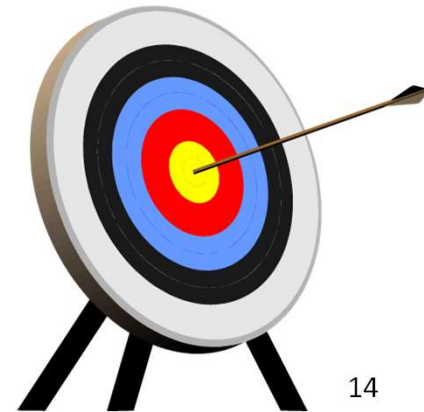
Numero di eventi possibili $N = 6$,

- Evento favorevole: l’uscita del 5: $P(5) = \frac{1}{6} = 17\%$
- Evento favorevole: uscita di un numero pari (2-4-6): $P(\text{pari}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$

Es. 2: Un altro caso con 6 possibilità, il tiro con l’arco:

[giallo=1, rosso=2, blu=3, nero=4, bianco=5, esterno=6]

- Arciere molto bravo $P(1) = 95\%$ (per esempio)
- Arciere medio $P(1) = 36\%$
- Arciere principiante $P(1) = 5\%$

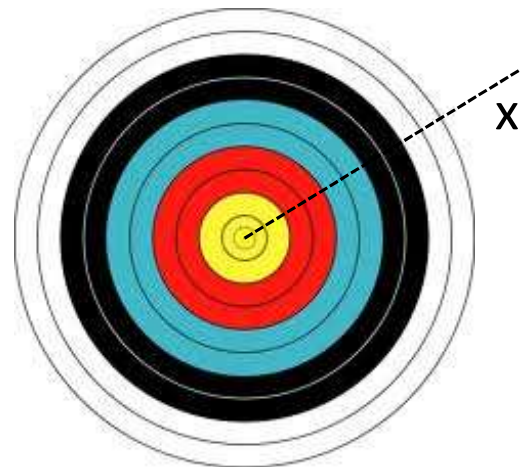


La probabilità – come si calcola II



Eventi continui – numero infinito di eventi possibili

Es. Il tiro con l'arco: per valutare l'evento decido di non usare i cerchi colorati del bersaglio, misurerò invece il valore della distanza "x" dal centro.



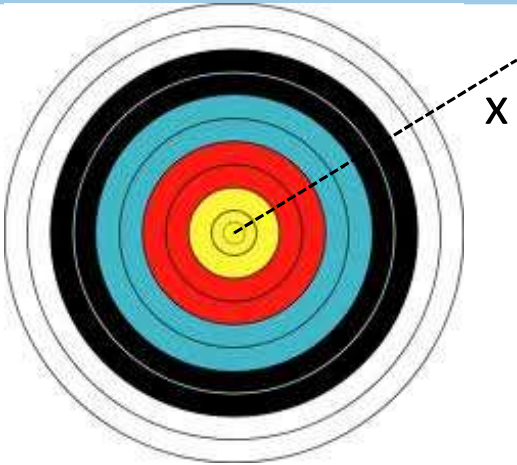
I cerchi neri sono uno ogni centimetro.
Il cerchio massimo ha raggio = 11 cm

Possibili risultati:

0 - 0,3 cm - 2,6 cm - 7,1 cm.....12,8 cm...

Il risultato dell'evento è un numero reale (con la virgola), i possibili valori sono infiniti.
In questo caso, invece delle probabilità per i singoli eventi, si dà una «funzione» continua, la funzione di distribuzione di probabilità...con questa si calcola la probabilità.

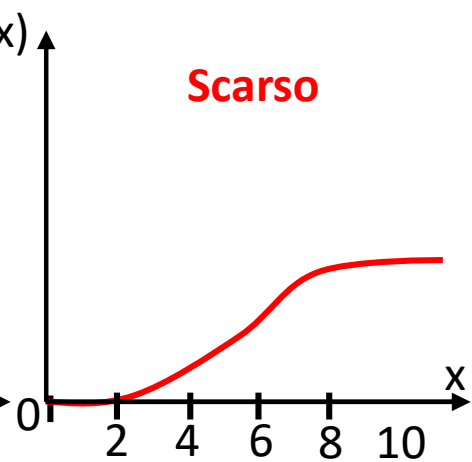
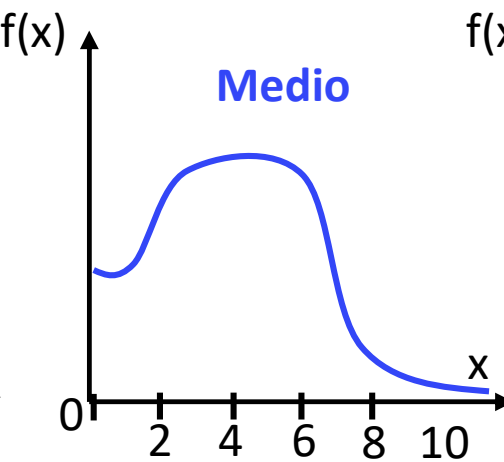
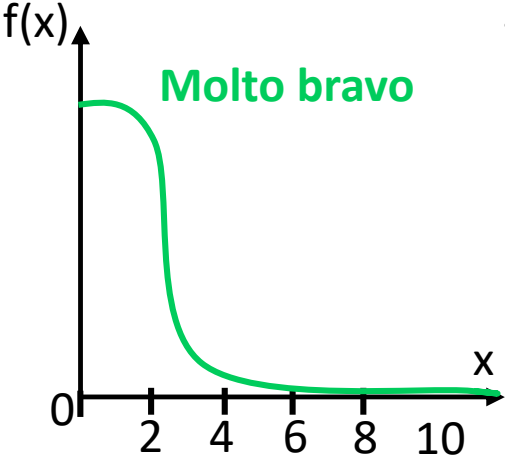
La probabilità – come si calcola III



La funzione di distribuzione di probabilità (fdd): $f(x)$

Il tiro con l'arco:
La misura di x (se ogni circoletto dista 1 cm) sarà un numero compreso fra «0» (centro perfetto) e >11 (al di fuori del bersaglio)...

Come sarà fatta la $fdd=f(x)$? Dipende da quanto è bravo l'arciere (nota: stiamo facendo una approssimazione... i veri arcieri probabilmente inorridiranno):

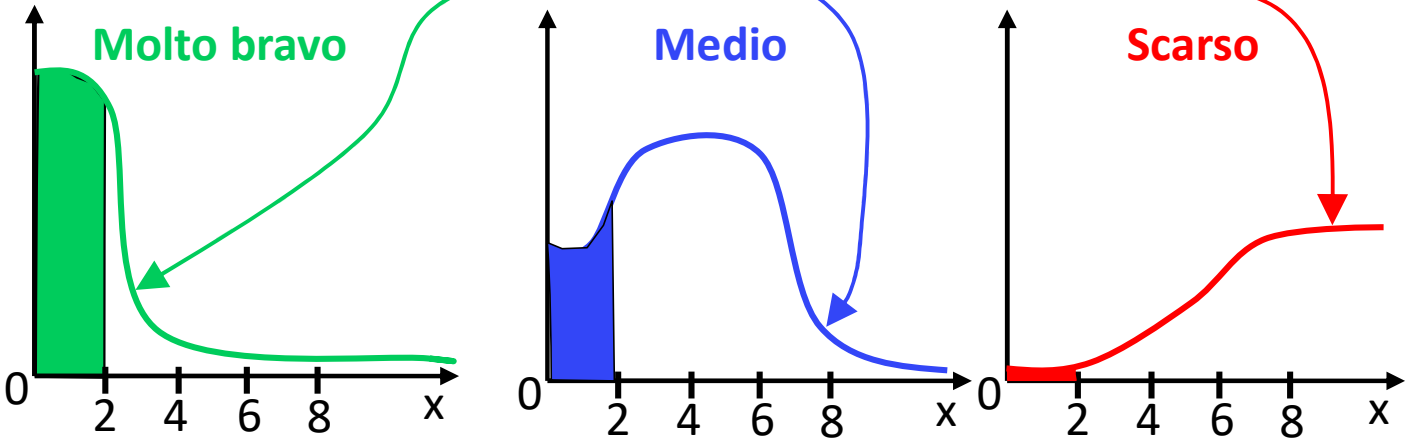


La probabilità – come si calcola IV



La probabilità relativa ad **un** evento si calcola misurando l'area che delimita l'evento (l'area totale sotto la curva è 1):

funzioni di distribuzione f(x) di probabilità degli ARCIERI



La probabilità che in un lancio uno degli arcieri abbia un risultato fra 0 e 2 (molto buono) sarà circa:

P=0,90
90%

P=0,20
20%

P=0,05
5%

La probabilità che in un lancio un arciere abbia la freccia che arrivi in un punto x fra 0 e 2 sarà:

$$P(0 < x < 2) = \text{Area sotto la } f(x)$$

Vuol dire calcolare l'integrale:

$$P(0 \leq d \leq 2) = \int_0^2 f(x) dx$$

La probabilità – come si calcola V



Quindi la funzione di distribuzione di Probabilità ci permette di fare delle **previsioni sui possibili risultati** di un evento «continuo».

Quindi per esempiola posizione, la direzione del moto, la velocità....



- La descrizione completa dello stato di un qualunque sistema (di una particella), è data dalla funzione d'onda $\psi(\mathbf{r},t)$ che rappresenta l'ampiezza di probabilità di trovare la particella in \mathbf{r} al tempo t .
- Data una funzione d'onda $\psi(\mathbf{r},t)$ e le condizioni iniziali: $\psi(\mathbf{r}_0, \mathbf{t}_0)$

la sua **evoluzione temporale** è descritta in **modo completamente deterministico** dall'equazione di **Schrödinger**...(vedi dopo)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \psi$$

Nota: L'equazione di Schrödinger **sostituisce** la seconda legge della dinamica di Newton: $F=ma$

La funzione d'onda della Meccanica Quantistica



La funzione d'onda $\psi(\mathbf{r},t)$ è una ampiezza di probabilità.

Non è direttamente misurabile, ma è tale che il suo modulo quadro fornisce la distribuzione di probabilità [di trovare la particella nel punto (\mathbf{r},t)].

$$P(\mathbf{r}, t) \propto |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \quad dP(r, t) = |\Psi(r, t)|^2 \cdot dr$$

NOTA: questa probabilità è il massimo dell'informazione che posso avere sullo stato del sistema.

Come è fatta la funzione d'onda? E perché si chiama così?

La funzione d'onda ha, in genere, **la forma matematica di una somma di onde (Teorema di Fourier)**,

Vedi <https://demonstrations.wolfram.com/>

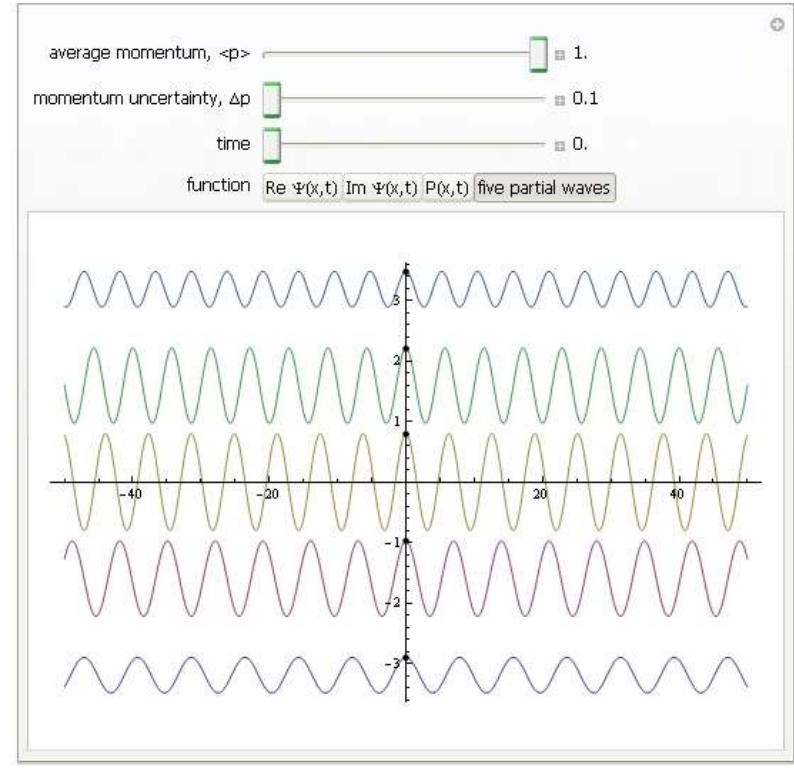
<https://demonstrations.wolfram.com/FourierSeriesOfSimpleFunctions/>



Esempio di una funzione d'onda di una particella in un punto (molto semplificato)

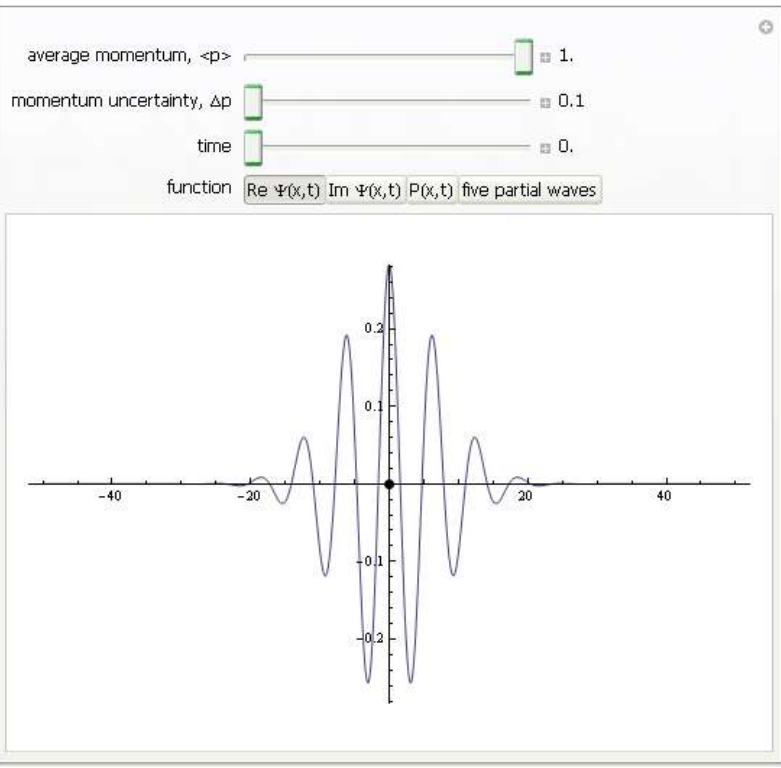
1. Qui vediamo le **5 onde** che compongono la funzione d'onda di una particella libera.

Wavepacket for a Free Particle



2. **Sommandole** si ottiene la **funzione d'onda $\psi(r,t)$** : è il cosiddetto «pacchetto d'onda», l'onda è localizzata in una certa parte di spazio.

Wavepacket for a Free Particle





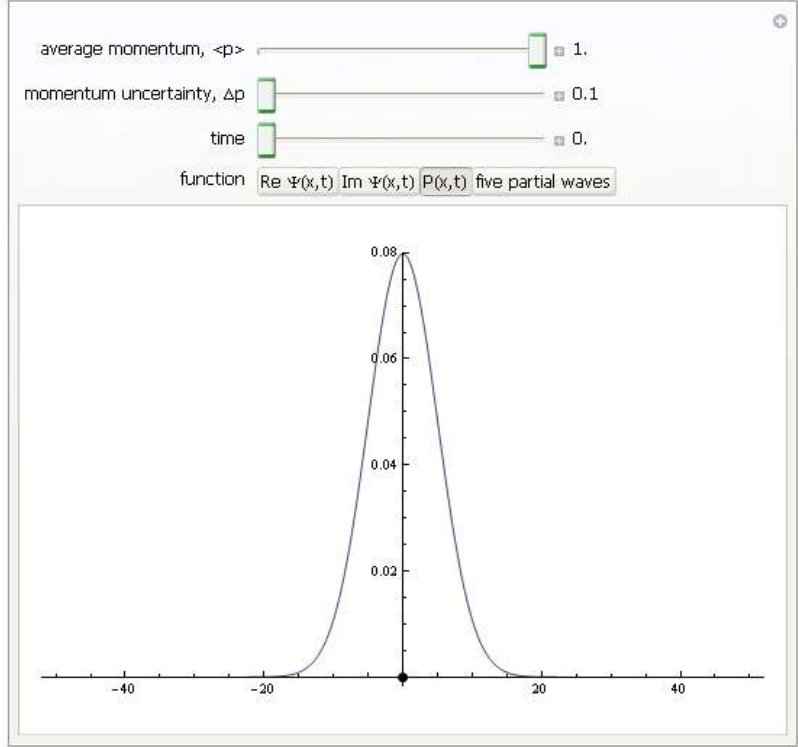
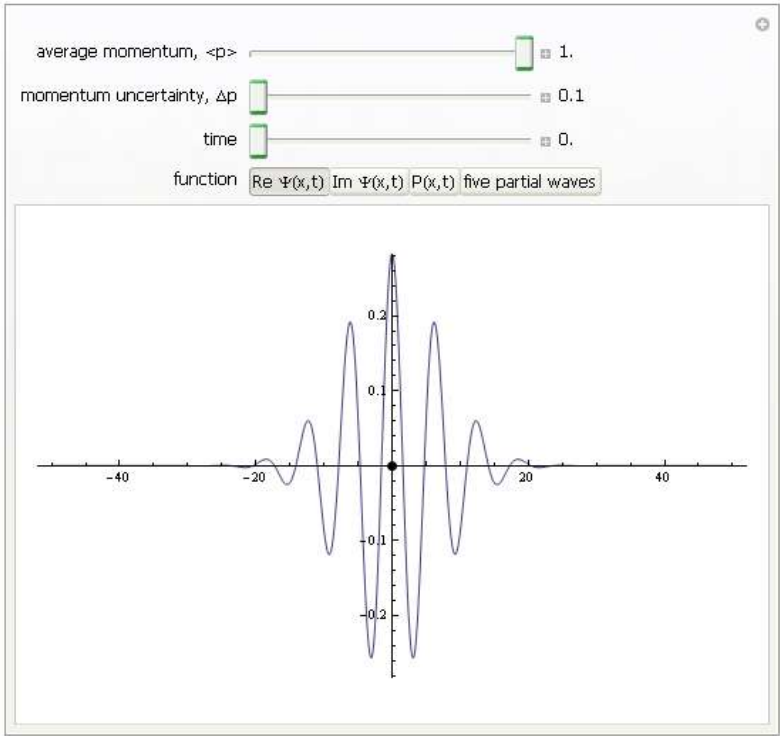
Esempio di una funzione d'onda (molto semplificato)

2. **Sommandole** si ottiene la **funzione d'onda $\psi(r,t)$**

3. Facendone il **modulo quadro** si ottiene la **d.d.probabilità**:

Wavepacket for a Free Particle

Wavepacket for a Free Particle



<https://demonstrations.wolfram.com/WavepacketForAFreeParticle/>

<https://phet.colorado.edu/sims/cheerpi/quantum-tunneling/latest/quantum-tunneling.html?simulation=quantum-tunneling&locale=it>

Evoluzione temporale della funzione d'onda, Schrödinger 1926



- A partire da una funzione d'onda $\psi(\mathbf{r},t)$, la sua **evoluzione temporale** è descritta in **modo completamente deterministico dall'equazione di Schrödinger**. (l'intermezzo del Natale 1925 ad Arosa, vicino a Davos, in Svizzera, con xxx?)

Es. Una particella di massa m (non relativistica), in presenza di un potenziale $V(r)$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\mathbf{r}) \cdot \psi$$

Esempio:

$V(r)$ potrebbe essere il potenziale Gravitazionale se la particella fosse sulla Terra: $V(r) = -G \frac{M_T}{R}$

- L'equazione di Schrödinger **sostituisce** la seconda legge della dinamica di Newton:

$$\bar{\mathbf{F}} = m\bar{\mathbf{a}} \quad - \quad \text{Esempio: la Forza Gravitazionale: } \bar{\mathbf{F}} = G \frac{mM_T}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Il significato della probabilità in MC/MQ



Meccanica Classica

La probabilità associata ad un evento è dovuta al fatto che, in genere, non conosco tutte le variabili del sistema.

Il lancio di un dado.
Il tiro con l'arco.

E' la cosiddetta probabilità «epistemica» cioè legata ad una mancanza di conoscenza.
Ma in teoria se potessi misurare tutto...
[Laplace].

Meccanica Quantistica

P1. La descrizione completa dello stato di un qualunque sistema, è data dalla funzione d'onda $\psi(\mathbf{r},\mathbf{t})$ che rappresenta l'ampiezza di probabilità associata al sistema.

La funzione d'onda ci dà il massimo dell'informazione possibile su di un sistema, che può essere solo probabilistica.

E' la cosiddetta probabilità «non epistemica», cioè non è dovuta ad una mancanza di conoscenza dello stato iniziale di un sistema.

La probabilità è intrinseca alla realtà.
Ma allora niente è certo? NO....

Nota: Questa **NON** è l'indeterminazione...lo vedremo dopo.



La visione del mondo della Relatività e della Meccanica Quantistica

Settimana 5

Lezione 5.3

Il Principio di Indeterminazione
L'esperimento con due fenditure

Carlo Cosmelli



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

coursera





Il Principio di Indeterminazione – Heisenberg, 1927

Versione soft (1927) o debole o operativa

- Per ogni sistema esistono coppie di grandezze fisiche che **non posso misurare (conoscere)** contemporaneamente con precisione arbitraria.

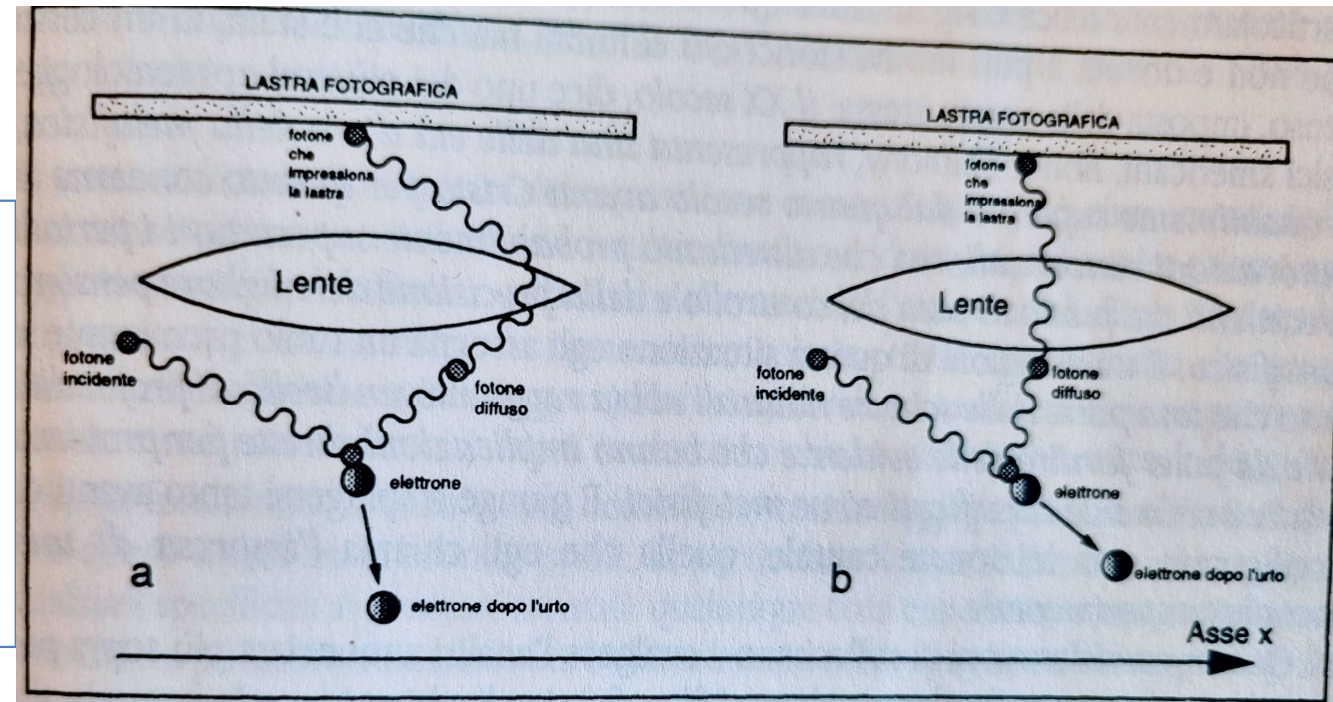
Esempio: posizione (x) e quantità di moto ($p = m \cdot v$) // Energia e tempo..

Il PDI di Heisenberg formalmente $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$, $[\hbar = h/2\pi]$

Δx è l'incertezza sulla posizione x , Δv l'incertezza sulla velocità v , supponendo m nota e costante.

Se una delle due è conosciuta molto bene... l'altra è molto incerta.

Esempio di un elettrone, inizialmente fermo, la cui posizione lungo l'asse x viene misurata inviando un fotone (f. incidente). Il fotone diffuso viene poi rivelato tramite una lente e una lastra fotografica. Il fotone diffuso ha una direzione casuale, e quindi anche l'elettrone dopo l'urto. La misura della posizione d'elettrone ha alterato la sua velocità.



Il Principio di Indeterminazione – Heisenberg, 1930



Versione hard (1930), o forte o intrinseca

- Per ogni sistema esistono coppie di grandezze fisiche che **non possiedono** contemporaneamente valori definiti.

Indipendentemente dal fatto che vengano misurate o no!

Il sistema quantistico non è né un'onda né una particella. Quindi non posso usare, per descriverlo, i termini «posizione» e «velocità» con accuratezza infinita.

Heisenberg: **le parole** non hanno senso, non essendo definite.

Il Principio di Indeterminazione: cosa scrive Heisenberg nel 1930

W. Heisenberg – Physical Principles of Quantum Theory – 1930

In queste lezioni Heisenberg espone il significato che intende dare al PdI. Ecco un estratto, la pagina in cui chiarisce l'impossibilità di utilizzare termini che non hanno significato nella Teoria quantistica.¹

$$\Delta x \Delta p_x \geq h .$$

This uncertainty relation specifies the limits within which the particle picture can be applied. Any use of the words "position" and "velocity" with an accuracy exceeding that given by equation (1) is just as meaningless as the use of words whose sense is not defined.¹

The uncertainty relations can also be deduced without explicit use of the wave picture, for they are readily obtained from the mathematical scheme of quantum theory

¹ In this connection one should particularly remember that the human language permits the construction of sentences which do not involve any consequences and which therefore have no content at all—in spite of the fact that these sentences produce some kind of picture in our imagination; e.g., the statement that besides our world there exists another world, with which any connection is impossible in principle, does not lead to any experimental consequence, but does produce a kind of picture in the mind. Obviously such a statement can neither be proved nor disproved. One should be especially careful in using the words "reality," "actually," etc., since these words very often lead to statements of the type just mentioned.

Il Principio di Indeterminazione, una analogia (attenzione!)



Il fatto che le parole “posizione” e “velocità”, nella descrizione di una particella, con un’accuratezza che eccede quella data dalle relazioni di indeterminazione di Heisenberg, sia senza senso (meaningless) come l’utilizzo di parole il cui significato non è definito, è *simile* (attenzione) alla caratteristica di un impulso sonoro (in realtà un impulso di una qualunque onda), in cui – data la descrizione formale tramite onde – esiste una relazione fra la durata Δt di un impulso sonoro e l’intervallo Δf delle frequenze che compongono l’impulso. La relazione è:

Indeterminazione classica delle onde $\Delta f \cdot \Delta t \sim 1$ quindi: **[intervallo delle frequenze] · [durata dell’impulso] ~ 1**

e proviene dall’analisi di Fourier applicata all’impulso.

Il significato è che quanto più è breve la durata dell’impulso, tanto è più ampio l’intervallo delle frequenze che lo compongono.

E viceversa: se ho l’emissione di una sola nota (molto precisa) dovrò avere un suono con un tempo di emissione molto lungo.

Vale la pena di notare che se moltiplico entrambi i membri della relazione $\Delta f \cdot \Delta t \sim 1$ per h (la costante di Planck), ottengo:

$h\Delta f \cdot \Delta t \sim h$, o anche $\Delta hf \cdot \Delta t \sim h$ da cui, ricordando che per un fotone $E=hf$, posso scrivere $\Delta E \cdot \Delta t \sim h$.

Espressione molto simile (a parte le costanti e il segno “ \geq ”) alla relazione di indeterminazione di Heisenberg fra Energia e tempo

$\Delta E \cdot \Delta t \geq h$. Va detto che si tratta di un’analogia formale, la relazione Energia/tempo, a differenza di quella fra impulso e posizione, non può essere dimostrata, è un vero e proprio principio.



Il Principio di Indeterminazione – Qualche calcolo

Il P.d.I. $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}$ Δx rappresenta l'incertezza che ho sulla x

Oppure, scrivendo $p=m \cdot v$, $\Delta x \cdot m \Delta v \geq \frac{h}{2\pi} \rightarrow \Delta x \cdot \Delta v \geq \frac{h}{2\pi m}$

Attenzione: c'è la massa a denominatore!

Un esempio «classico»

Un granello di polvere con: $\emptyset \cong 1 \mu\text{m}$; $m \cong 10^{-15} \text{ kg}$; $v \cong 1 \text{ mm/s}$

Supponiamo di averlo fotografato con un microscopio, con una precisione $\Delta x = 0,1 \mu\text{m}$.

Quindi, per il P.d.I. , l'incertezza sulla velocità sarà almeno:

$$\Delta v \geq \frac{1}{\Delta x} \frac{h}{2\pi m} = \frac{1 \cdot 10^{-34}}{0,1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-15}} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ m/s} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ mm/s}$$

Quindi l'incertezza esiste, ma è talmente piccola che non me ne posso accorgere, in ogni caso non avrò mai la possibilità di misurarla.

Dal punto di vista pratico il granello di polvere ha una posizione ed una velocità perfettamente definite.

I corpi non microscopici non sono sensibili al Principio di Indeterminazione.

Il Pdl di Heisenberg è incompatibile con le orbite di Bohr:

- Secondo Bohr il momento angolare degli elettroni intorno ad un atomo è quantizzato:

$$r \cdot p = n \hbar \quad (1)$$

- Se voglio definire una traiettoria devo quindi avere: $\Delta x \ll r$ e $\Delta p \ll p$, quindi

$$\frac{\Delta x}{r} \cdot \frac{\Delta p}{p} \ll 1 \quad (2)$$

- il Pdl di Heisenberg dice che: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$, dividendo per rp ho:

→ $\frac{\Delta x}{r} \cdot \frac{\Delta p}{p} \geq \frac{\hbar}{rp}$...che, utilizzando la (1), diventa: $\frac{\Delta x}{r} \cdot \frac{\Delta p}{p} \geq \frac{1}{n}$ che è

incompatibile con la (2), a meno che $n \gg 1$.

Quindi le relazioni di indeterminazione rendono impossibili le «orbite semiclassiche» di Bohr.

La MQ: cosa cambia rispetto alla Meccanica Classica



Meccanica Classica

- Un sistema fisico è descritto da: massa, dimensioni, carica elettrica, colore, posizione, velocità.... Tutte queste grandezze sono misurabili.
- L'evoluzione del sistema è data dalle leggi di Newton, $\mathbf{F}=\mathbf{ma}$... e dall'espressione delle Forze a cui è soggetto il sistema. La previsione è deterministica, in casi particolari può essere caotica, cioè non prevedibile.
- Le caratteristiche di un sistema possono essere misurate e conosciute con precisione arbitraria (quasi).

$$h = 0$$

Meccanica Quantistica

- Un sistema fisico è descritto **completamente** da una funzione d'onda $\psi(\mathbf{r},\mathbf{t})$, che **non è direttamente misurabile**. La $\psi(\mathbf{r},\mathbf{t})$ è legata alla probabilità di ottenere un certo risultato in una **misura = interazione del sistema con un altro «oggetto»**
- L'evoluzione del sistema è data dalla equazione di Schrödinger. L'evoluzione della funzione d'onda è completamente deterministica.
- Un sistema **non possiede** alcune proprietà fin quando non vengono misurate. In ogni caso la precisione è limitata per questioni di principio.

$$h \neq 0$$

Come «funziona» la funzione d'onda?



Per chiarire come «funziona» la MQ dobbiamo capire bene il processo della «misura».

Ci sono due punti fermi, che sembrano contraddittori:

1. La **funzione d'onda** è deterministica...ha un'evoluzione temporale **definita** (esatta)
2. Il risultato di una **misura** è **probabilistico**.

Cosa succede quando io «misuro» qualcosa (Es. la posizione di un elettrone)?

1. L'elettrone **prima** della misura è **descritto** dalla f.d.o.
 - «L'elettrone» non è localizzato...
 - La f.d.o. è estesa nello spazio
2. Quando faccio la misura avviene il **collasso** della funzione d'onda; la f.d.o. collassa in uno dei tanti risultati possibili, ho un risultato **certo (dopo la misura)**.
3. Dopo la misura la f.d.o. ricomincia ad estendersi nello spazio, fin quando l'elettrone non verrà misurato un'altra volta.

Nota: misurare vuol dire interagire; per avere interazione non serve che ci sia un «misuratore», basta che il sistema interagisca con un oggetto esterno.

Vediamo una simulazione: →[PHET – Università del Colorado]

Perché gli oggetti «classici» sono localizzati e con posizione e velocità definite?



1) L'effetto del Principio di Indeterminazione di Heisenberg è trascurabile a causa della

massa a denominatore: $\Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{v} \geq \frac{h}{2\pi m}$

<https://phet.colorado.edu/sims/cheerpi/quantum-tunneling/latest/quantum-tunneling.html?simulation=quantum-tunneling&locale=it>

2) Il fatto che la funzione d'onda si «allarga» ed è differente da zero in una grossa parte di spazio vale SOLO per una particella libera. Quando ho un urto con un altro oggetto, o una osservazione, o una qualunque interazione, la funzione d'onda collassa e si localizza.

Ma per esempio per un gas con $p = 1$ Atmosfera e $T = 25^\circ$ C il numero di urti al secondo in 1 mm di cammino è:

$$n \sim 9 \cdot 10^{31} \text{ urti al secondo}$$

Una qualunque particella, in genere, si localizza continuamente... Non è mai libera! ☹️

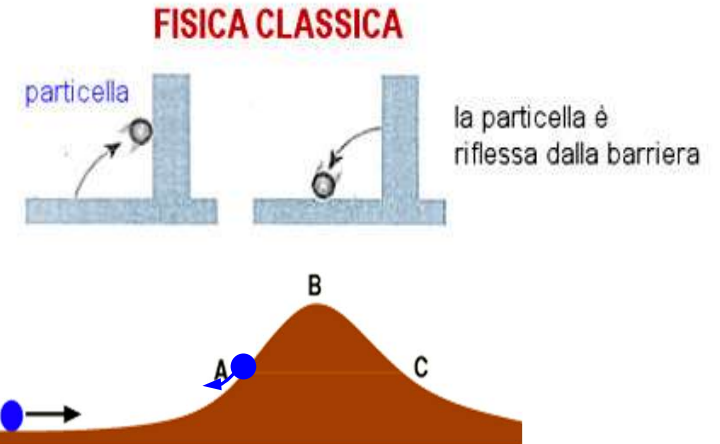


Un effetto esclusivamente quantistico: l'effetto tunnel

Cosa succede secondo la meccanica classica:

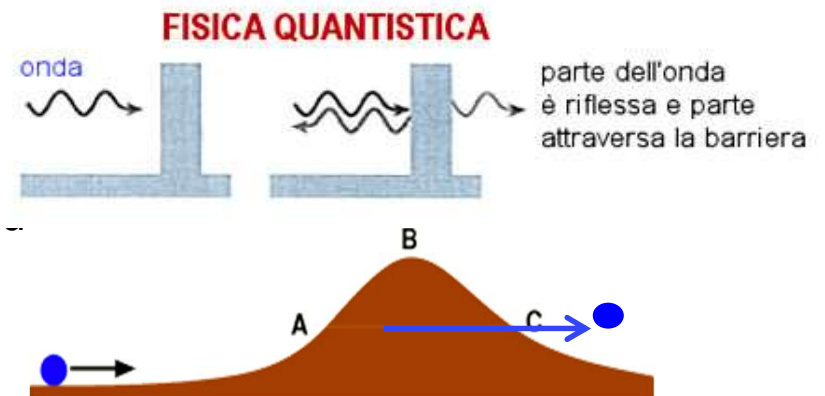
- Se lancio una particella contro un muro...

- La stessa cosa avviene se lancio una palla verso una collina, ma non gli do energia sufficiente a superarla.



Cosa succede secondo la meccanica quantistica:

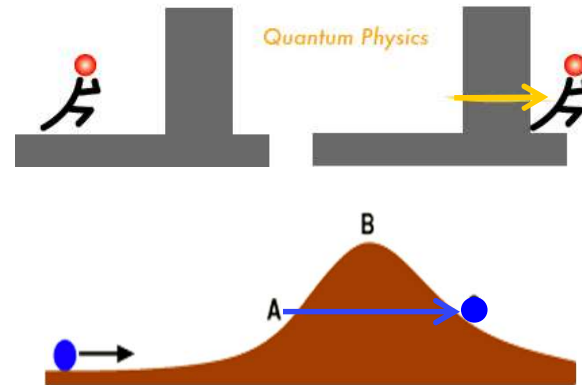
- C'è una certa probabilità che il corpo passi attraverso la barriera.



L'effetto tunnel – Una simulazione



Secondo la meccanica quantistica c'è una certa probabilità che il corpo passi attraverso la barriera.



La probabilità può essere piccola...grande... dipende dall'energia del corpo, dall'altezza della barriera...

Vediamo una simulazione:

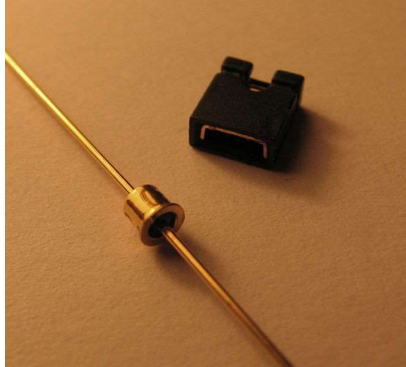
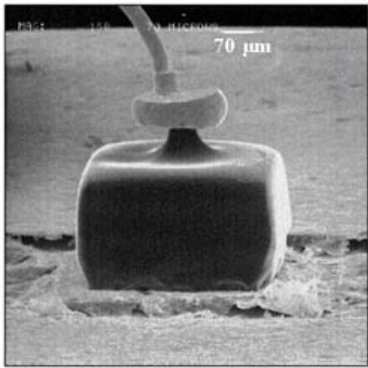
<https://phet.colorado.edu/sims/cheerpj/quantum-tunneling/latest/quantum-tunneling.html?simulation=quantum-tunneling&locale=it>

cambiando l'altezza della barriera cambiano le probabilità di Trasmissione e di Riflessione.

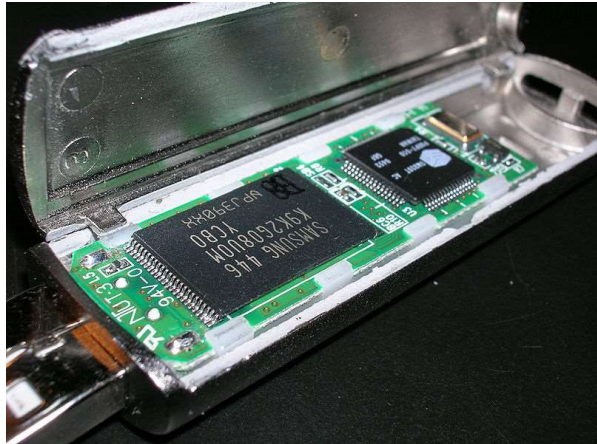


L'effetto tunnel – Oggetti reali

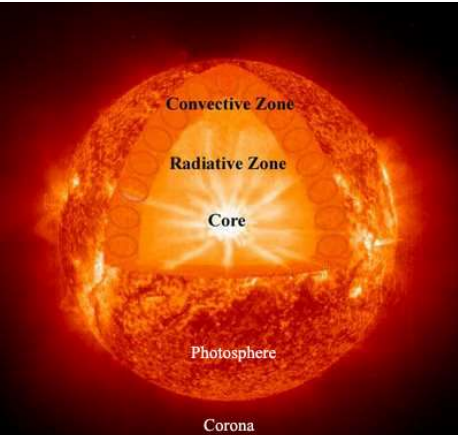
Un diodo ad effetto tunnel:



Una memoria a stato solido penna USB



Le reazioni di fusione nucleare nelle stelle

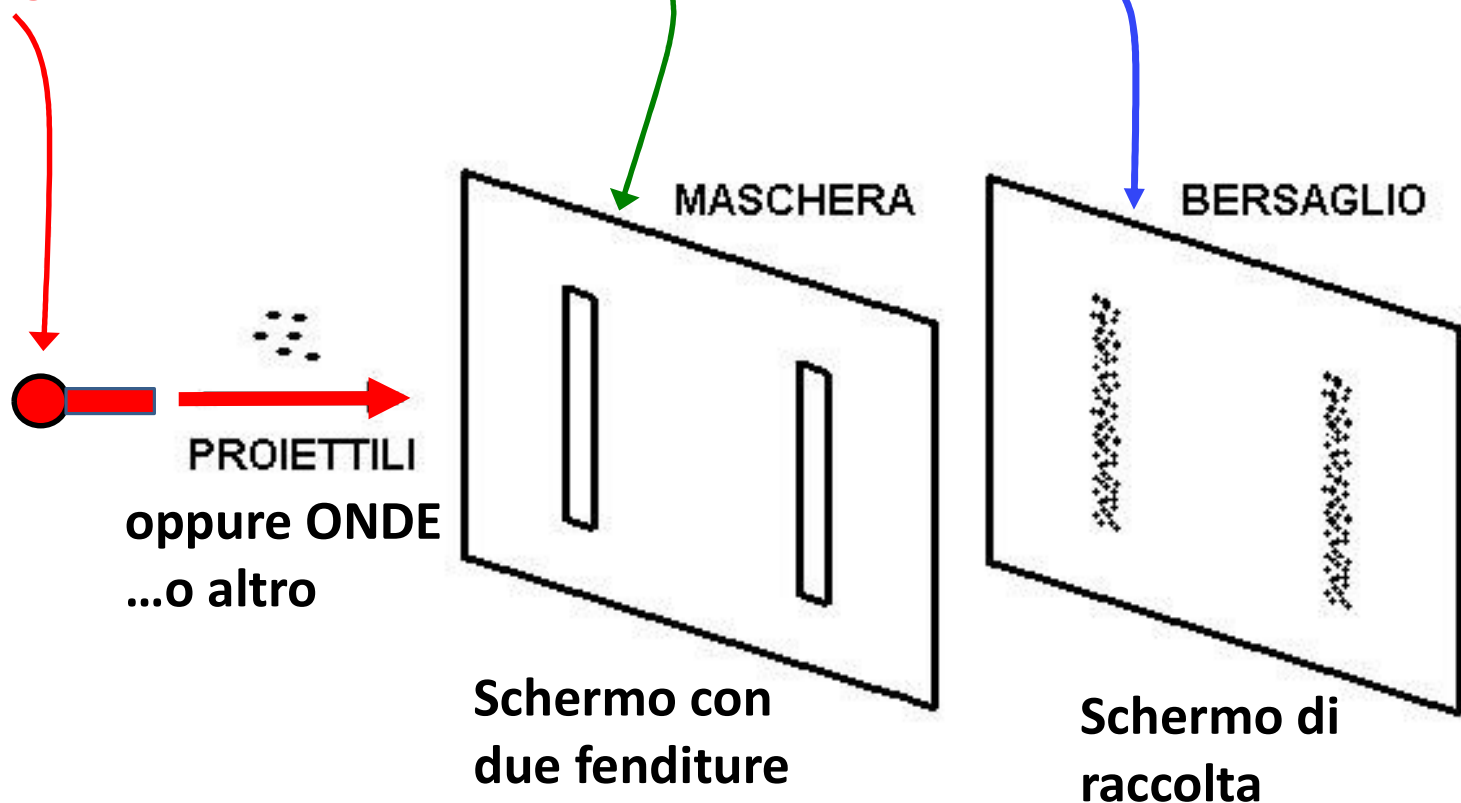


Microscopio ad effetto tunnel: i puntini sono singoli atomi.



Un esperimento «strano», tipicamente quantistico.

Il sistema su cui facciamo l'esperimento:
Una **sorgente** // Uno schermo con due **fenditure** // uno **schermo** di raccolta



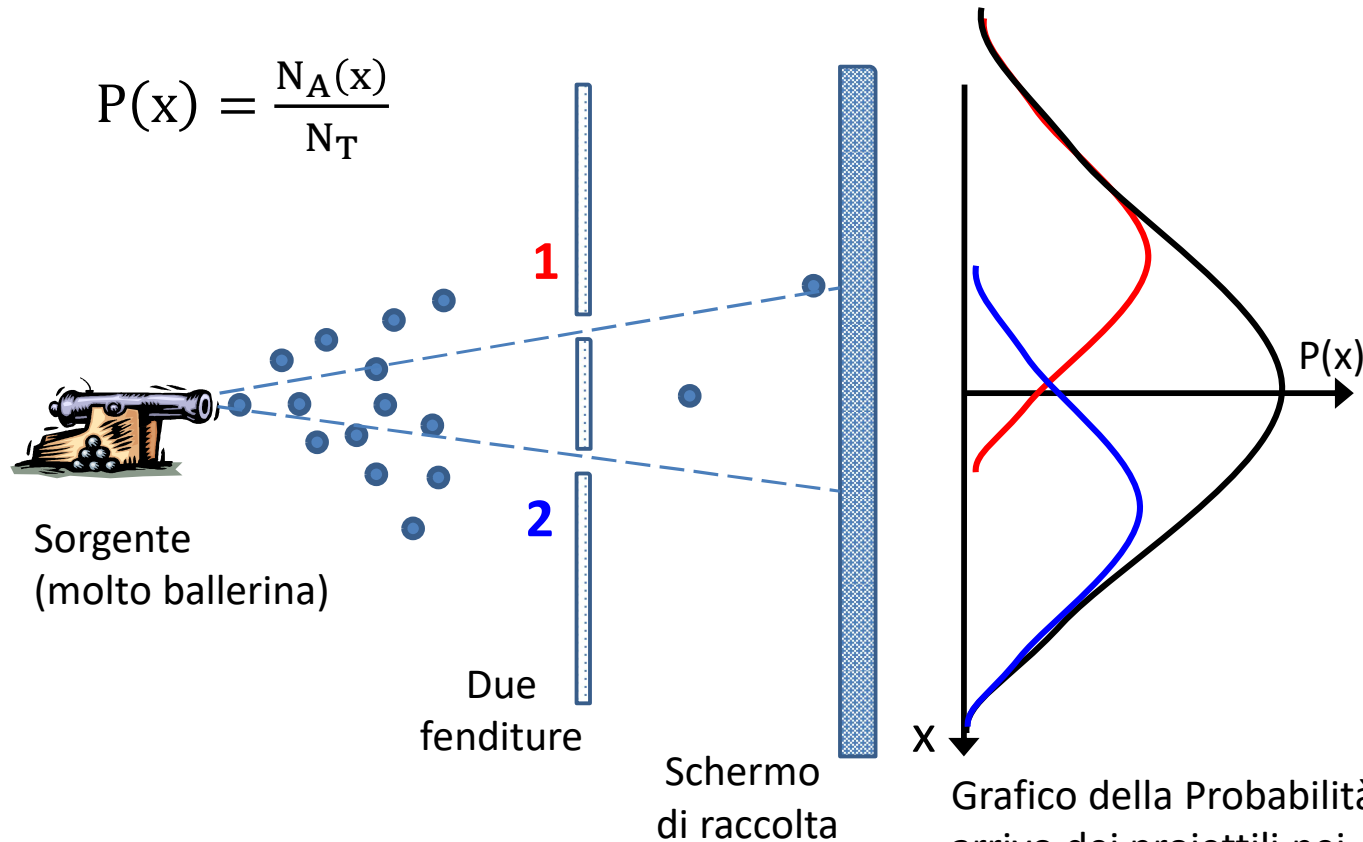
Si può vedere anche in rete: PHET...tanti altri siti.



1. Sparo proiettili indistruttibili

Conto i proiettili arrivati nei vari punti dello schermo e calcolo la probabilità $P(x)$ di arrivo sullo schermo

$$P(x) = \frac{N_A(x)}{N_T}$$



Schermo di raccolta

x

P(x)

Grafico della Probabilità di arrivo dei proiettili nei vari punti dello schermo.

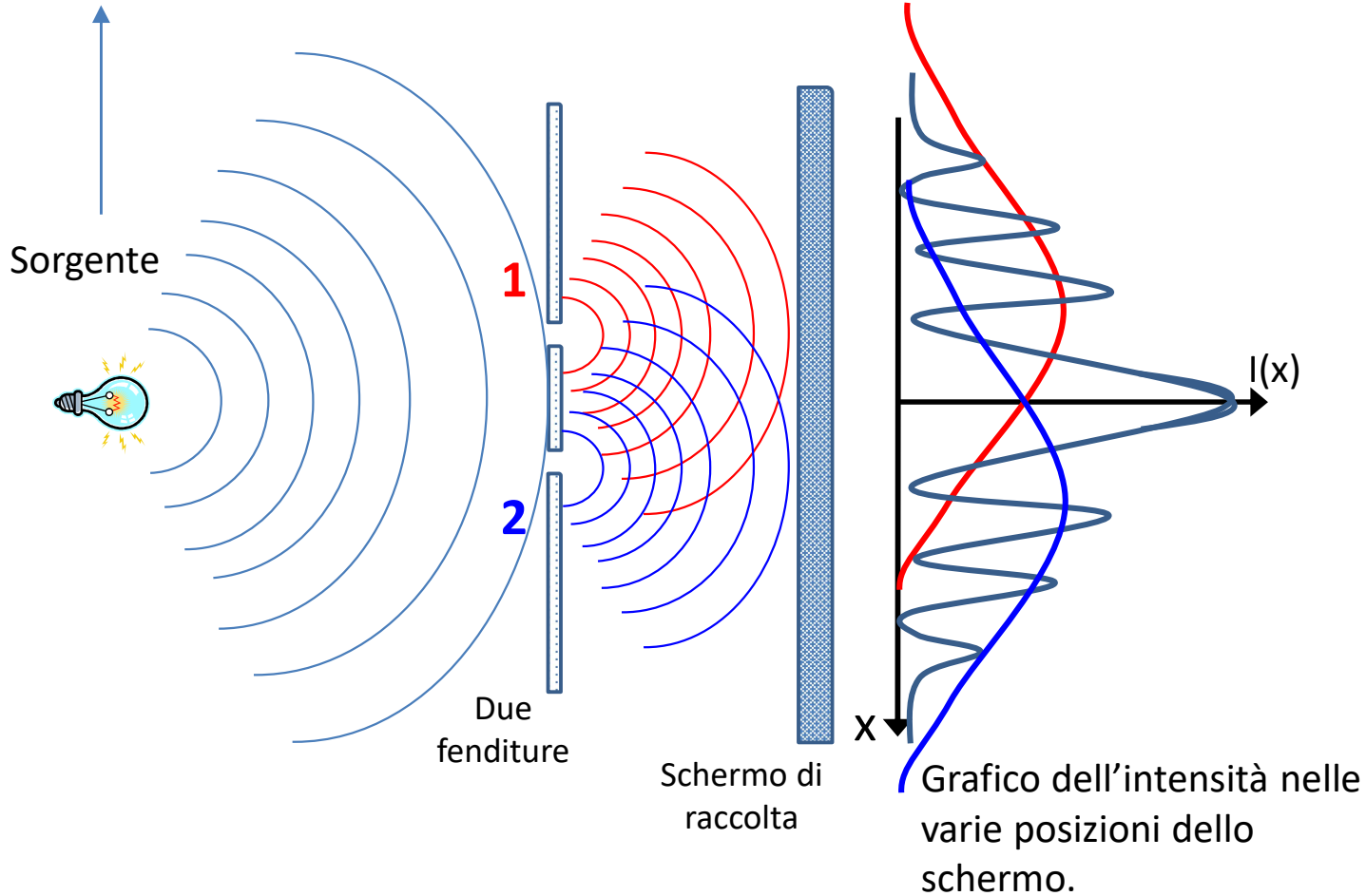
1. Aperta solo la fenditura 1: P_1
2. Aperta solo la fenditura 2: P_2

- Aperte tutte e due: $P(1,2)$
- Le Probabilità si sommano
- $P(1,2) = P_1 + P_2$
- I proiettili o passano da una parte, o passano dall'altra



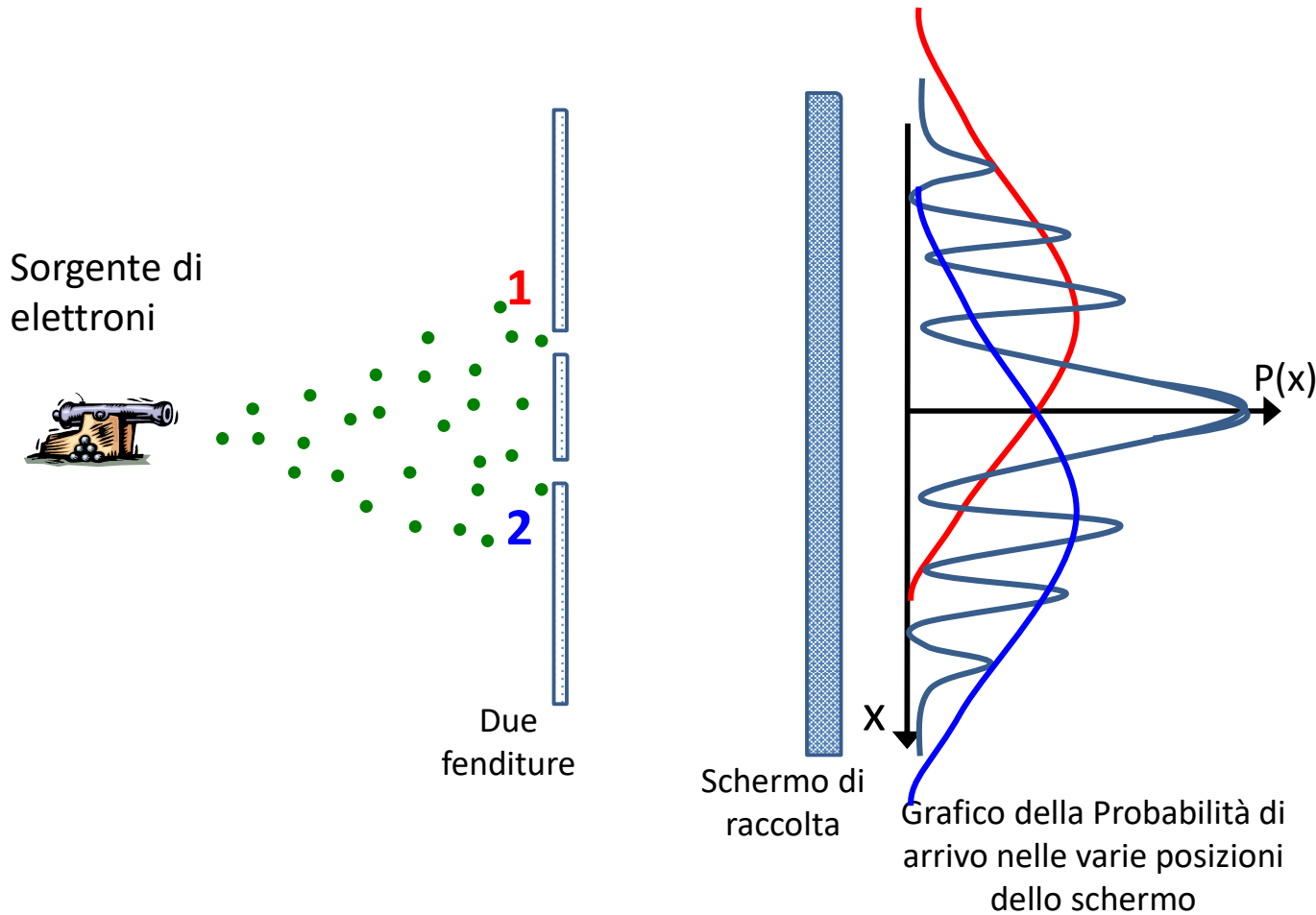
1. La sorgente genera onde – Misuro l'intensità I dell'onda sullo schermo

Ampiezza dell'onda: $A(r, t) \sim A_0 \cos(kr + \omega t)$; Intensità: $I(x) = A^2(x)$



1. Aperta solo la fenditura 1: I_1
 2. Aperta solo la fenditura 2: I_2
- Aperte tutte e due:
 $I = A^2 = (A_1 + A_2)^2$
C'è interferenza!
 - Le Ampiezze si sommano
 - L'intensità è il quadrato di A
 - C'è interferenza.
 - **L'onda passa da una fenditura E dall'altra.**

1. La sorgente spara elettroni singoli – Conto gli elettroni



1. Aperta solo la fenditura 1: P

2. Aperta solo la fenditura 2: P

- Aperte tutte e due: P
C'è interferenza!

?

Come è possibile?

- L'interferenza c'è solo con le onde, che passano da entrambe le fenditure.
- Gli elettroni arrivano uno ad uno e sono indivisibili!